Preparación Fase Local Olimpiada Matemática
Curso 2017/18

9 de enero de 2018

Problemas para alumnos de ESO

1. Consideramos dos conjuntos de números reales: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{100}\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{50}\}$. Calcula el número de aplicaciones sobreyectivas posibles de A a B de modo que

$$f(a_1) \leq f(a_2) \leq \cdots \leq f(a_{100}).$$

2. Ordenamos el desarrollo de $(x + \frac{1}{2\sqrt[4]{x}})^n$ en potencias decrecientes de x. Si los tres primeros coeficientes forman una progresión aritmética, ¿cuántos términos hay en el desarrollo anterior donde la potenciad e x es un número entero?

3. Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y que para $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 5) \geq f(x) + 5,$$

y

$$f(x + 1) \leq f(x) + 1.$$

¿Cuánto vale $f(2017)$?

4. Construimos una sucesión de figuras en el plano del siguiente modo: P_0 es el triángulo equilátero con área 1, P_{k+1} se obtiene a partir de P_k dividiendo cada lado de P_k en tres segmentos iguales, el segmento del medio se quita y, en su lugar, se colocan los dos lados de un triángulo equilátero apoyado en el segmento que hemos quitado y apuntando hacia el exterior de P_k. Sea S_n el área de P_n. Se pide:

(1) Dibuja las regiones P_0, P_1 y P_2.

(2) Calcula una fórmula que te dé el área de P_n.

(3) Calcula $\lim_{n\to\infty} S_n$.

5. Consideremos la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ satisfaciendo:

(1) $f(x - 4) = f(2 - x)$ y $f(x) \geq x$ para $x \in \mathbb{R}$.

(2) Para $x \in (0, 2)$, $f(x) \leq (\frac{x+1}{2})^2$.

(3) El mínimo valor de f en $\mathbb{R}$ es 0.

Encuentra el mayor m $(m > 1)$ tal que existe $t \in \mathbb{R}$ con $f(x + t) \leq x$ para $x \in [1, m]$.

6. Supón que $3/2 \leq x \leq 5$. Prueba que

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{15-3x} < 2\sqrt{19}.$$

7. La reglas de una carrera de obstáculos dicen que en el obstáculo n una persona debe lazar un dado n veces. Si la suma de los puntos obtenidos en esos n lanzamientos es superior a 2^n, la persona ha superado el obstáculo.

   (1) ¿Cuál es el número mayor de obstáculos que una persona puede superar?

   (2) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cruce los primeros tres obstáculos?

8. Si escribimos el polinomio $f(x) = 1-x+x^2-x^2+\cdots-x^{19}+x^{20}$ como $g(y) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{19}x^{19}+a_{20}x^{20}$ mediante el cambio $y = x-4$, calcula $a_0+a_1+\cdots a_{19}+a_{20}$.

9. Sea p un número primo impar. Sea k un número entero positivo tal que $\sqrt{k^2-pk}$ también es un entero positivo. Encuentra el valor de k en función de p.

10. Un número natural se dice afortunado si la suma de sus dígitos es igual a 7. Ordenamos los números afortunados de manera creciente y los escribimos como una sucesión $a_1, a_2, \cdots$. Si n es tal que $a_n = 2005$, cuánto vale a_{5n}.

Problemas Olimpiadas

Jaime Benabent y Alberto Daza

15 de diciembre de 2017

1. Sean $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ puntos distintos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, y diferentes del $(1, 0)$. Cada punto se colorea o rojo o azul, con exactamente n puntos rojos y n puntos azules. Sea $R_1, R_2, ..., R_n$ una ordenación cualquiera de los puntos rojos. Para cada $i \in 1, ..., n$ sea B_i el punto azul mas cercano a R_i viajando en dirección contraria a las agujas del reloj por la circunferencia empezando en R_i. Prueba que el número de arcos de la circunferencia con sentido contrario a las agujas del reloj de la forma $R_i \to B_i$ que contienen al punto $(1, 0)$ es independiente de la manera en la que ordenemos los puntos $R_1, ..., R_n$.

2. Una palabra es una sucesión finita de letras. Una palabra es un palindromo si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Sea una secuencia de palabras $W_0, W_1, W_2, ...$ definida tal que: $W_0 = a, W_1 = b$ y para $N \geq 2$, $W_N = W_{N-2}W_{N-1}$, la palabra formada escribiendo W_{N-2} seguida de W_{N-1}. Prueba que para cualquier entero $n \geq 1$ la palabra $W_1W_2W_3...W_n$, formada escribiendo $W_1, W_2, W_3, ...W_n$ en sucesion, es un palindromo.

3. $\triangle ABC$ es una triángulo agudo y D, E, F son los pies de las perpendiculares a los lados por A, B, C respectivamente. Prueba que $DE + DF \leq BC$ y caracteriza los triángulos para los que se cumple la igualdad.

4. Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ es irracional.

5. Encontrar todas las funciones $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tales que $f(n + f(n)) = 2f(n)$.

6. Probar que para toda cuadrícula de dimensiones $2^n \times 2^n$ donde n es un número natural tal que $n \geq 2$, si se le quita un cuadrado, entonces se puede rellenar con figuras como la siguiente: